Géom. Diff

(Physique)

$\swarrow$

Algèbre de Lie

$\searrow$?

Polygraphes

et ?

Les choses commencent ainsi :

$$
\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, "y"'] \arrow[dr, "x"] & \\
\bullet \arrow[dr, "x"'] \arrow[rr, phantom, "{[x,y]} \Rightarrow"] & & \bullet \arrow[dl, "y"] \\
& \bullet &
\end{tikzcd}
$$

DÉFINITION

Une <u>algèbre de Lie</u> est un triplet

$$(A, +, [-,-])$$

où

$(A,+)$ est un <u>groupe abélien</u>

et

$$[-,-] : A \times A \longrightarrow A$$

une opération binaire (le "crochet de Lie")

et <u>bilinéaire</u>.

Elle doit vérifier les <u>axiomes</u> :

(1) $[x,x] = 0$

(d'où on déduit que $[x y] = -[y,x]$)

(2)

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z[x,y]] = 0$$

(id. de JACOBI)

Un polygraphe

c'est une sorte

de graphe multidimensionnel

Exple Un graphe est un polygraphe

de dimension 1 (ou 1-polygraphe)

—

On peut l'identifier à la caté-

gorie libre qu'il engendre

—

Pour les dimensions supérieures

les choses sont un peu plus complexes

Mais, essentiellement, on peut

identifier un n-polygraphe avec

la n-catégorie qu'il engendre

CONVENTIONS

- Je noterai les crochets de Lie sans virgules

$$[xy] \text{ au lieu de } [x,y]$$

- Je remplacerai les variables

$$x, y, z, \dots$$

par des chiffres

$$1, 2, 3, \dots$$

- Je noterai par un crochet ternaire l'identité de JACOBI

$$[1\,2\,3] = [1[23]] + [2[31]] + [3[12]]$$

POLYGRAPHIE de l'identité de JACOBI

$$[123] = 0$$

ou

$$[1[23]] + [2[31]] + [3[12]] = 0$$

et, en l'interprétant dans une

algèbre associative :

$$1[23] - [23]1 + 2[31] - [31]2 + 3[12] - [12]3 = 0$$

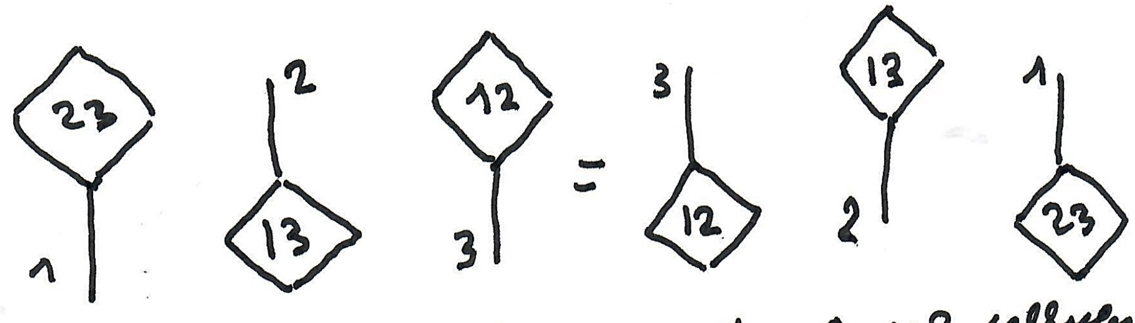
puis, en séparant le positif et le négatif :

$$1[23] + 2[31] + 3[12] = [23]1 + [31]2 + 3[12].$$

Les formes polygraphiques qui s'annoncent nous conduit à transformer cette équation en utilisant la relation $[xy] = -[yx]$:

$$1[23] + [13]2 + 3[12] = 3[12] + 2[13] + [23]1.$$

Traduisons ces termes en formes polygraphiques shématisée



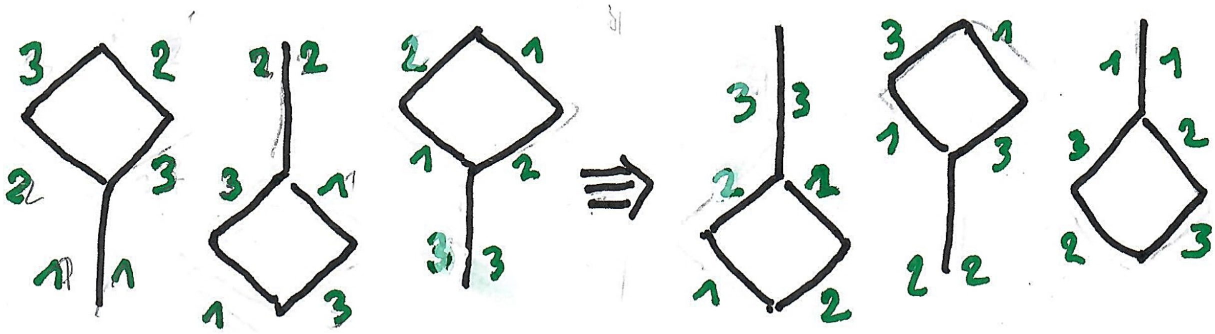
Précision sur le sens des 1 et 2 cellules

$\downarrow \qquad \Rrightarrow$

7

Ici

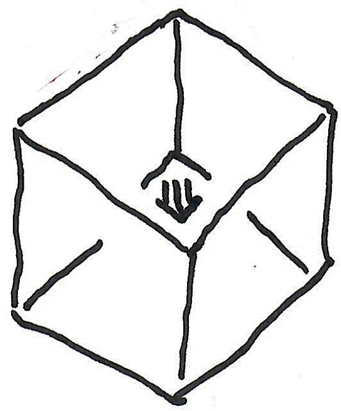
- Toutes les 1-cellules sont orienté vers le bas
- Toutes les 2-cellules sont orientées gauche-droite
- Une 3-cellule est venue remplacer l'égalité.
(Elle se reduit a une identité qd JACOBI est satisfait
- On labellise les shémas précédents



On rapproche ces formes

Ces deux cellules sont "parallèles" et leur amalgame donne le cube polygraphique

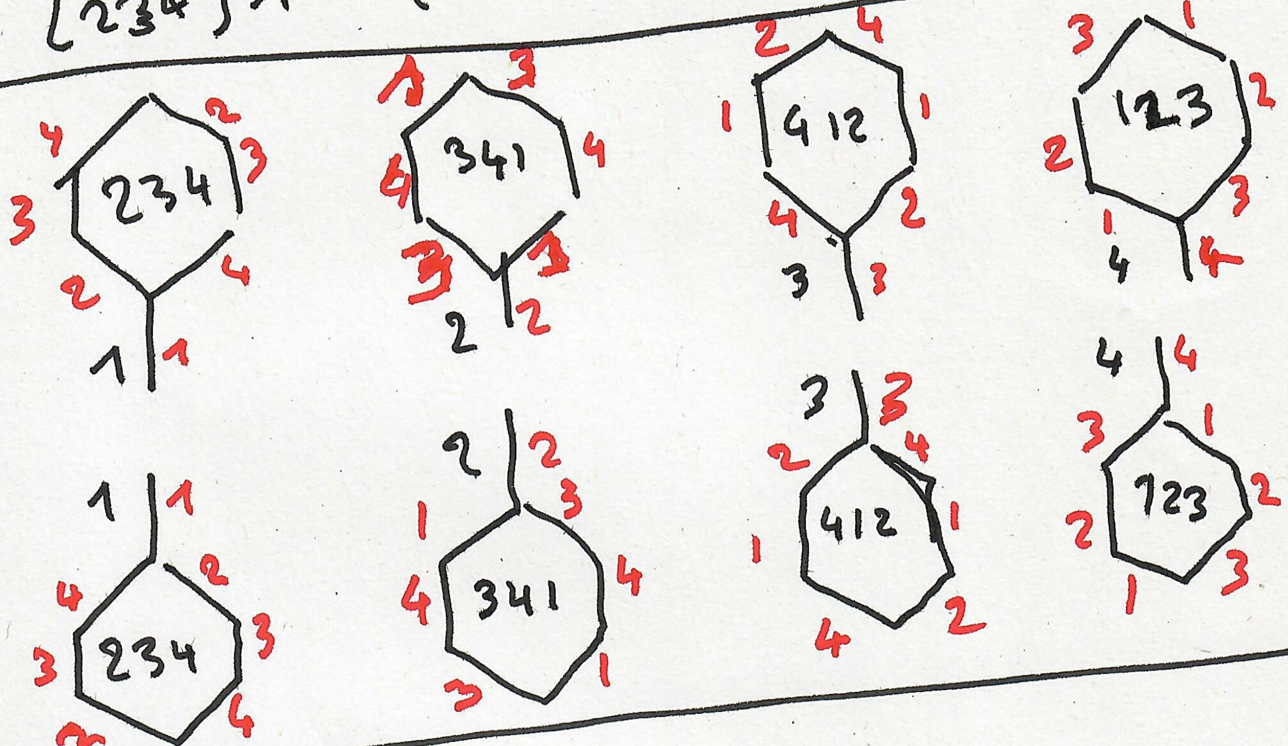
[1 2 3] =

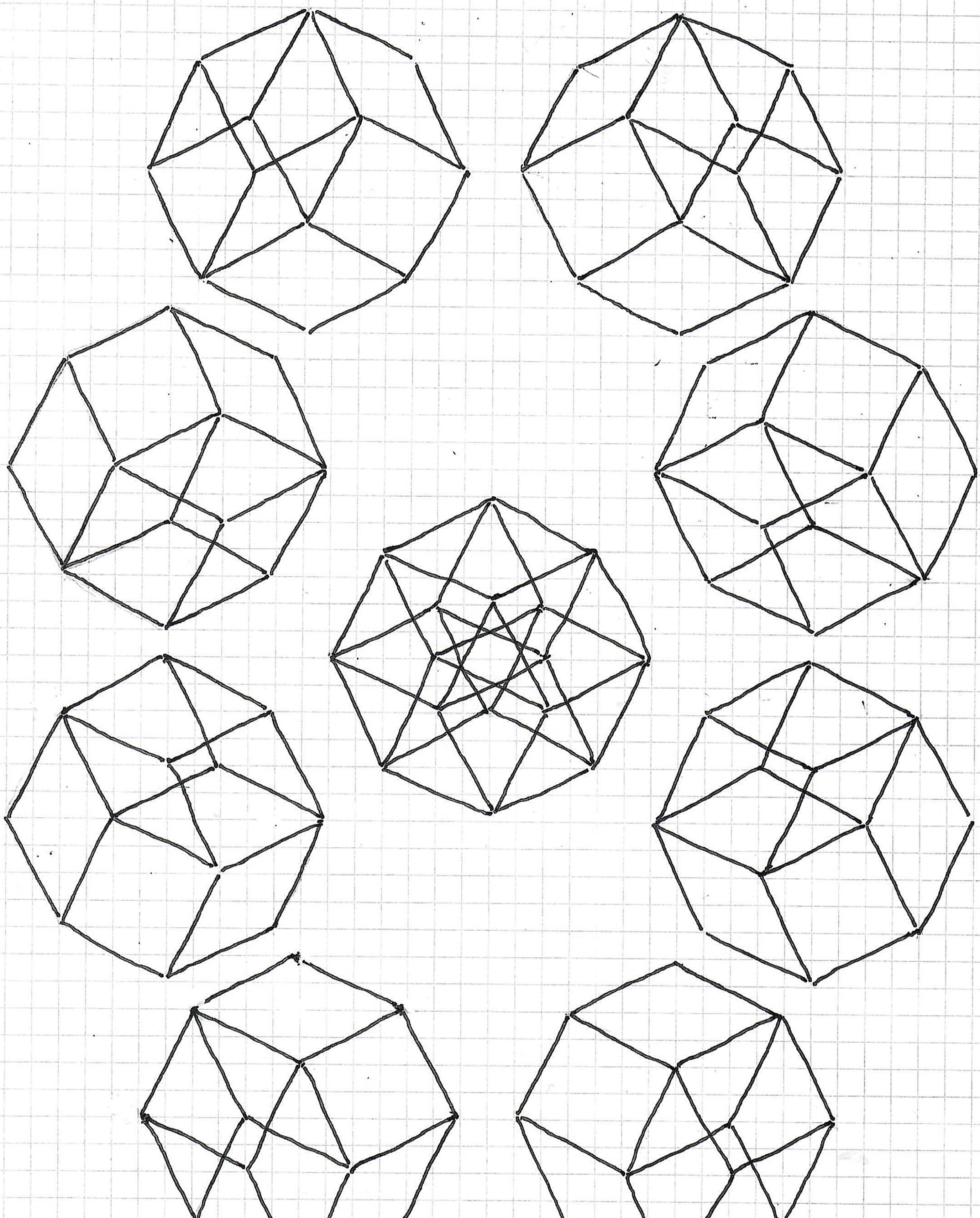


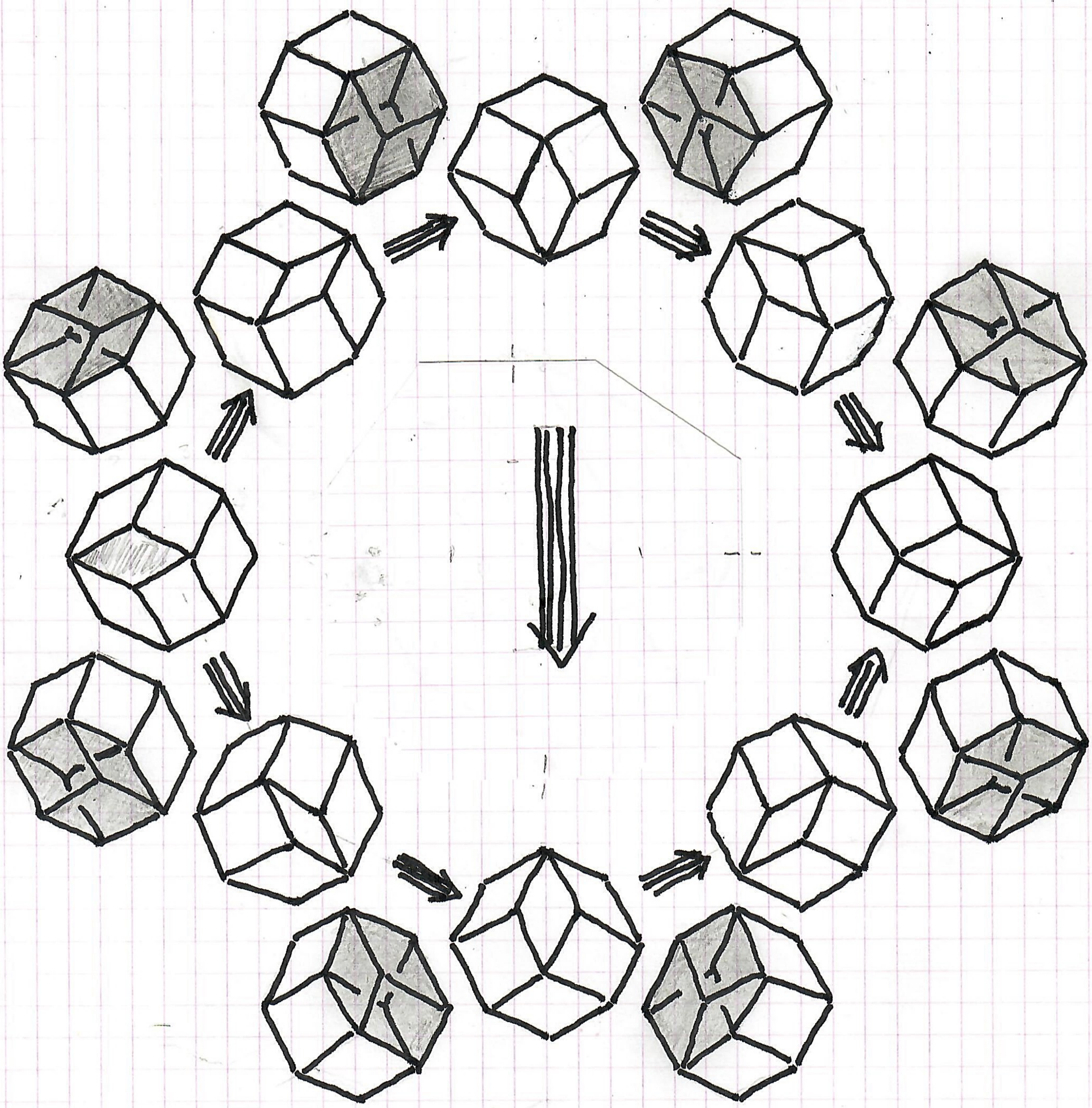
$$[1[234]] + [2[341]] + [3[412]] + [4[123]] = 0$$

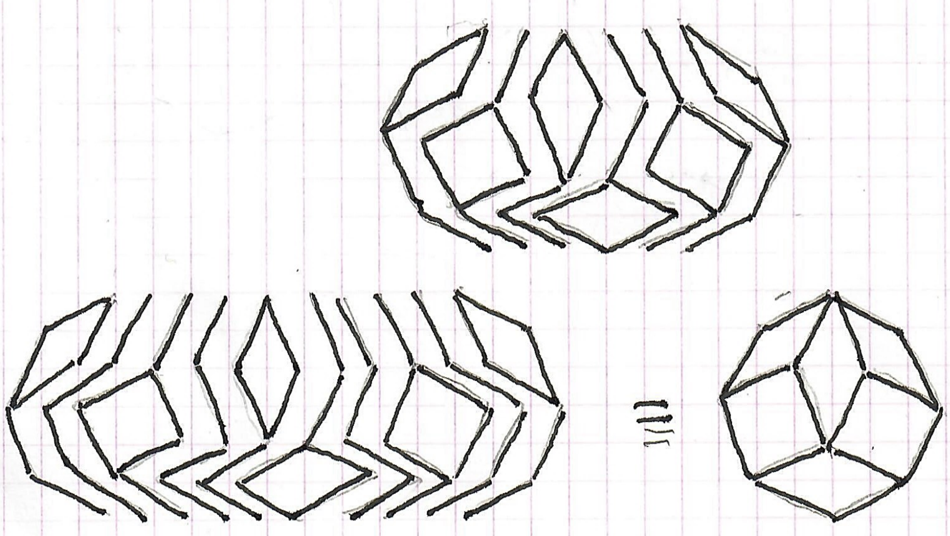
$$1[234] + 2[341] + 3[412] + 4[123]$$

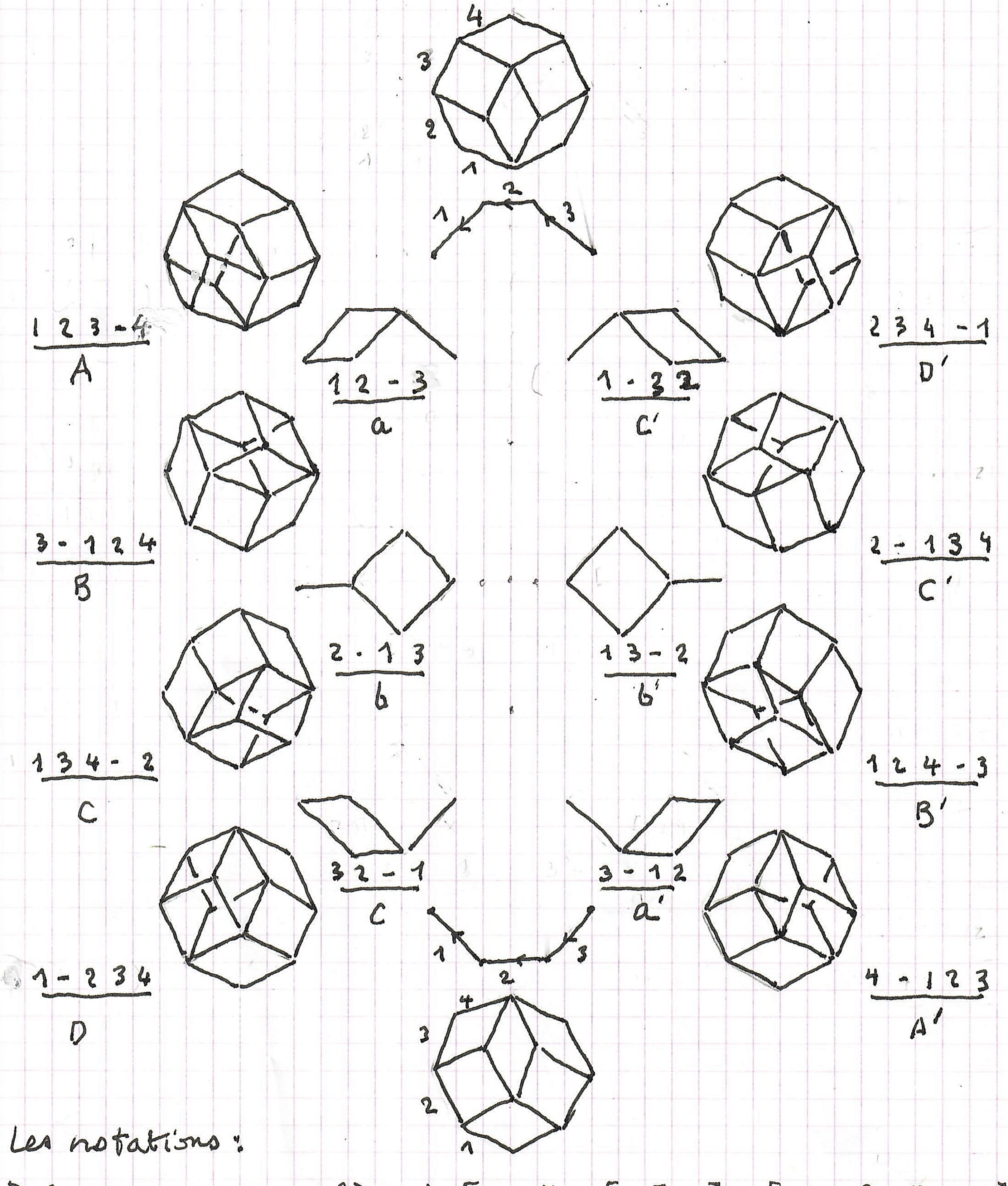
$$\doteq [234]1 + [341]2 + [412]3 + [123]4$$











Les notations :

Décomposition complète de $[x,y,z] = [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[y,z]]$

Décomposition (très incomplète) d'un $[x,y,z,t]$

1 - commutativité d'une algèbre 2-aire : $[x,y]=0$

2 - commutativité d'une "Algèbre" : $[x,y,z]=0$